Jürgen Floer

Kinder und Zahlen
Einige psychologische und didaktische Fragen

1. Vorbemerkungen

Es wäre ein aussichtsloser Versuch, die Begegnung von Kindern mit einigen Seiten beschreiben zu wollen.
Die Entwicklung des Zahlbegriffs und arithmetischer Einsichten ist ein Geschehen mit sehr vielen Aspekten.
Der Zahlbegriff ist nicht irgendwann plötzlich „da" und dann für die Zukunft verfügbar, sondern entwickelt sich nach und nach. Zahlen sind keine Steine, die man findet und nur noch nach Hause zu tragen braucht. Sie haben eine lange Entstehungsgeschichte – wie auch das Laufenlernen, der Spracherwerb, die Bildung naturwissenschaftlicher Begriffe, die Entstehung von Wertvorstellungen und alles andere in der Entwicklung des Kindes.
Dies bedeutet, daß es auch für den Lehrer intensives Nachdenken erfordert, um diesen Prozeß zu verstehen und dem Kind helfen zu können.
Die Diskussion um den „richtigen Weg" zu den Zahlen ist so alt wie die Rechendidaktik. (Einen guten Überblick findet man bei Radatz/Schipper, 1983.)
Es ging dabei oft um dieselben Fragen wie auch heute wieder:
- *Auf welchen Wegen kommen Kinder zu Zahlen?*
- *Welche Rolle spielen Zahlwörter?*
- *Sind anschauliche Stützen notwendig und hilfreich?*
- *Wenn ja, welche können Kindern am besten helfen?*

Es hat zeitweise heftige Kämpfe gegeben, etwa zwischen „Zählern" und „Anschauern". Für die einen waren Zahlen vor allem Objekte des Denkens, die man daher auch nur denkend erfassen kann. Wenn man davon überzeugt ist, dann wird man Bemühungen um Veranschaulichungen nur mit Zurückhaltung und Skepsis verfolgen.
Für die anderen war gerade die Anschauung der Boden für den Zahlbegriff. So sind z. B. Zahlbilder in allen möglichen Varianten (Büttner, Hentschel, Born/Lay) entstanden – natürlich mit heftigen Auseinandersetzungen um den „besten" Weg. Die Bemühungen um Veranschaulichungen haben auch eine Reihe von Materialien hervorgerbracht, die noch heute – in teilweise veränderter Form – gute Dienste tun, so etwa Rechenstäbe (Tillich, bereits zu Beginn des letzten Jahrhunderts!), Hundertertafeln (Heer), Rechenlatten (Haase) und anderes mehr.
Ein Blick in die Geschichte kann durchaus helfen, einige aktuelle Fragen besser einzuordnen und alte Fehler zu vermeiden: etwa mit Alleinvertretungsansprüchen und dogmatischer Starrheit für diesen oder jenen Weg zu den Zahlen, diesen oder jenen Zahlaspekt, diese oder jene Darstellung zu kämpfen. Das würde nur zu einer unnötigen Verengung des Blickwinkels führen und Kindern und Lehrern kaum weiterhelfen.

2. Zwischen Mengen, PIAGET und Zählen

Gegenwärtig hat die Diskussion einen neuen Höhepunkt erreicht. Ganz grob vereinfacht kann man die Lage so charakterisieren: Waren die Bemühungen zur Zahlbegriffsbildung in den beiden letzten Jahrzehnten von mengentheoretischen Ansätzen einerseits, vom Einfluß PIAGETS andererseits beherrscht, so wird nun die Bedeutung des Zählens wieder neu entdeckt.
Dies erscheint vielen Lehrern als schwer verständliche Kehrtwendung. Die einen resignieren oder kümmern sich nicht um das „schon wieder Neue“. Die anderen sind verunsichert – und es geht ihnen wie dem Mann, der so lange über die Schwierigkeiten des Treppensteigens reflektiert, bis er überhaupt keinen Schritt mehr wagt.
Für den Unterricht kann das eine wie das andere nicht hilfreich sein. Daher sollen die folgenden Stichworte zunächst die beiden Grundpositionen aufzeigen, dann aber vor allem deutlich machen, daß es sich keineswegs um Widersprüche und Unvereinbares handelt.

(1) Die Position, die sich (allerdings in bedenklicher Vereinfachung) mit dem Namen PIAGETS[1] verbinden läßt, ist in vielen didaktischen Veröffentlichungen beschrieben. Ihr Ausgangspunkt ist die Überzeugung, daß der Zahlbegriff nicht schon dadurch ausgebildet wird, daß das Kind ein Stück der Zahlwortreihe beherrscht. Mit dem rein verbalen Zählen allein ist noch kaum etwas an Einsichten über Zahlen gewonnen. Die entscheidenden Entwicklungen müssen sich daher „woanders“ vollziehen: dort nämlich, wo das Kind etwa erfährt, daß die fünf kleinen Plättchen in einer langen Reihe gelegt ebenso viele sind wie zu einem Turm gestapelt, ebenso viel auch wie 5 viel größere Plättchen. Von der räumlichen Anordnung und der Art der Objekte unabhängig zu werden, bedeutet einen wesentlichen Schritt zum Zahlbegriff. Erst wenn diese „Invarianz“ erreicht ist, kann die Zahl 5 zur Kennzeichnung beliebiger Mengen mit 5 Objekten verwendet werden.
Als zweites muß hinzukommen, daß die Zahlen*reihe* aufgebaut wird. Indem man immer ein weiteres Element dazunimmt, erhält man (Vertreter für) alle Zahlen. Fünf Objekte sind eines mehr als vier, eins weniger als sechs. Diese Grundidee der „Reihung“, die ja auch in die Zahlwortfolge gleichsam „eingebaut“ ist, muß hier zunächst auf der Ebene der konkreten Operationen entdeckt werden.
Die Überzeugung, daß die Bildung „kognitiver Schemata“ nicht auf der Ebene der Wörter und Zeichen abläuft, zieht sich durch den gesamten PIAGET-Ansatz. Im Mittelpunkt stehen Handlungen und ihre „Verinnerlichungen“:
- die Objekte verschiedener Mengen einander zuordnen („Stück-für-Stück-Korrespondenz“),
- die Lage von Objekten verändern und solche Veränderungen (konkret oder in der Vorstellung) wieder rückgängig machen,
- Objekte dazulegen oder wegnehmen,
- eine Kollektion von Objekten in Teilmengen zerlegen und aus Teilen zusammensetzen.

Dieses System von Operationen, das vor allem dadurch ausgezeichnet ist, daß es zu Operationen Umkehroperationen gibt und Operationen hintereinander ausgeführt werden können, bildet die Basis für die Entwicklung des Zahlbegriffs.
In vielen an PIAGET orientierten Kursen für den arithmetischen Anfangsunterricht ist entsprechend versucht worden, diese Basis gezielt auszubilden. Die ersten Kapitel

des Mathematikbuches waren in einem „pränumerischen Vorspann“ dem Umgang mit strukturiertem Material gewidmet, erst nach geraumer Zeit erschienen dann die Zahlwörter.

(2) Erst in den letzten Jahren ist das Zählen zu neuen Ehren gekommen (zumindest in der fachdidaktischen Diskussion – im Schulalltag war es wohl niemals vergessen), und im Zuge dieser Entwicklung ist der Weg zu offeneren Konzepten für den arithmetischen Anfangsunterricht frei geworden. Der Ausgangspunkt: Das Kind zählt schon lange, bevor es in die Schule kommt, es zählt Murmeln, Finger, Schritte, Glockenschläge – warum sollte die Schule nicht an diese Fähigkeiten der Kinder anknüpfen?
Nun bedeutet dieses Zählen sicher mehr, als fließend die Zahlwortreihe aufzusagen. Was beim Zählvorgang geschieht, und wie sich vom Zählen ausgehend arithmetische Einsichten gewinnen lassen, ist in einer Fülle neuerer Arbeiten analysiert worden. Bei diesen Untersuchungen ist deutlich geworden, daß die Invarianz keineswegs *die* Voraussetzung für alles Weitere ist. Man muß nicht warten, bis das Kind diese Stufe erreicht hat, um fruchtbare Erfahrungen zu Zahlen machen zu können. So kann GINSBURG (1977) die Empfehlung geben: *“Don’t bother about conservation.”* (Plagen Sie sich nicht mit der Invarianz!)

(3) Vor diesem Hintergrund muß man den PIAGET-Ansatz sicher neu durchdenken und die Argumente präzisieren. Hier soll zunächst einigen Mißverständnissen vorgebeugt werden.

- PIAGETS Theorie ist keine didaktische Handlungsanweisung. Ob z.B. ein pränumerischer Vorspann sinnvoll ist, läßt sich aus ihr nicht herleiten. Solche Folgerungen sind eher das Ergebnis einer zu einfachen Sicht von psychologischen Ergebnissen und pädagogischer Praxis. Bei einer Kritik sollte man allerdings bedenken, daß es nicht sehr viele psychologische Theorien gab, an denen sich die Didaktik in der jüngeren Vergangenheit hätte orientieren können. Daß sie sich an PIAGET angelehnt hat und nicht an Reiz-Rekations-Modelle des Lernens, ist bei allen Einwänden gegen Details sicher positiv zu bewerten.
- Nebenbei sei bemerkt, daß die Didaktik in den zurückliegenden Jahrzehnten keineswegs durch die „Abschaffung“ des Zählens gekennzeichnet war. Sie steht und fällt auch nicht mit einem Schlagwort wie Invarianz.
- Ganz unangemessen wäre es, die Bedeutung PIAGETS auf einige Eigentümlichkeiten zu reduzieren, die teilweise unter Berufung auf ihn in Schulbücher eingegangen sind. Seine Analyse der Genese des Zahlbegriffs zeigt wichtige Aspekte der kognitiven Entwicklung auf, auch wenn die Invarianz ihre Funktion als *die* Säule der Zahlbegriffsbildung (möglicherweise) verliert.
  Andere Einsichten, die mit der Psychologie PIAGETS verbunden sind, bleiben nach wie vor für die Didaktik außerordentlich wichtig: die Bedeutung von Handlungen für die Bildung von Begriffen, die Verinnerlichung dieser Handlungen zu Operationen, die Strukturierung der Operationen und vor allem die Einbettung der Zahlbegriffsentwicklung in das Gesamtgeschehen der Entwicklung der Intelligenz.
  Die Zahlbegriffsentwicklung ist in jedem Fall ein Vorgang, der viel tiefer reicht als bis zum richtigen Gebrauch von Zahlwörtern oder -zeichen. Das Entscheidende

spielt sich unter dieser Oberfläche ab – für welchen Zugang man sich auch entscheidet.

3. Zählen – ein komplexes Geschehen

3.1. Schwierigkeiten beim Zählvorgang

Die Forderung, im Anfangsunterricht an die Zählfertigkeiten der Kinder anzuknüpfen, bringt zugleich die Verpflichtung, genauer zu klären, wie sich Zählkompetenz entwickelt und wie weit sie den Umgang mit Zahlen trägt.

Für Erwachsene ist Zählen ein ziemlich problemloser Vorgang, für Kinder keineswegs. Dies wird in den Schwierigkeiten sichtbar, die Kinder beim Zählen haben (können):

- Das Zählen wird zu einem rein verbalen Akt, zum Aufsagen der Wortreihe „eins, zwei, drei ...".
- Dadurch wird das Zählgeschehen abgekoppelt von Handlungen und Bildern, die das Kind als Stützen seines Denkens braucht.
- Weiterführende Überlegungen zu Zahlen, wie etwa Vergleich und Addition, werden vom Zählen her nur unzureichend erschlossen oder aber bleiben so eng an das Zählen gebunden, daß sie sich nicht von ihm lösen können.

Daß Zählen ein komplexes Geschehen ist und was bei seiner Entwicklung vor sich geht, ist in vielen neueren Arbeiten aufgedeckt worden. Zwei Schwerpunkte haben sich dabei herausgebildet: Die Analyse des Zähl*vorganges* (vgl. vor allem GELMAN/GALLISTEL: The child's understanding of number, 1978) und der Strukturierung der Zahlwortreihe und ihres Gebrauchs (vgl. etwa FUSON/HALL, 1982).

Beides hängt natürlich eng zusammen. Weiterführende Untersuchungen zur Addition und Subtraktion enthält der Sammelband CARPENTER/MOSER/ROMBERG (1982). Eine tiefgehende Analyse zur Entwicklung von Zahlvorstellungen bei Kindern und ein ausgewogenes Konzept für den Arithmetikunterricht bietet das Buch von GINSBURG: „Children's Arithmetic" (1977), das allerdings nur in Englisch vorliegt. Einen guten Überblick über die bisherigen Forschungsergebnisse geben SCHMIDT (1983) und – stärker auf den Mathematikunterricht in der Grundschule bezogen – RADATZ/SCHIPPER (1983).

3.2. Analyse des Zählvorgangs

Was geht beim Zählen vor sich?

Die folgenden Stichworte sollen dies – in Anlehnung an GELMAN/GALLISTEL, die die aufgeführten „counting principles" genauer untersucht haben – deutlich machen.

- Man braucht zunächst eine Folge von Zahlwörtern oder Zahlzeichen, die in einer festen Reihenfolge abgerufen werden können. Das muß nicht unbedingt die uns vertraute Zahlwortreihe „eins, zwei drei, vier, ..." sein, sondern könnte durchaus eine andere Wortfolge („eene, mene, miste ...") sein, aber auch eine Folge von optischen oder akustischen Zeichen: Morsezeichen, Fingerstellungen, Flaggen zeichen, Tastsignale, Klopfzeichen u.a. (Ein solches ungewöhnliches Zahlzeichensystem zu erfinden, ist übrigens ebenso spannend wie lehrreich.)

- Mit Hilfe dieser Zeichen kann man nun zählen, insbesondere eine Sammlung von Objekten auszählen.
  Doch dieser Abzählvorgang hat es „in sich“: Er führt nur dann zum Ziel, wenn jedem Objekt genau ein Zahlwort zugeordnet wird. Kein Element darf vergessen oder doppelt gezählt werden, keinem Zahlwort dürfen mehrere Objekte zugeordnet werden, kein Zahlwort darf mehrfach verwendet werden.
  Dies gelingt, wenn für jedes Objekt, das angetippt, zur Seite geschoben oder markiert wird, ein Zahlwort abgerufen wird. Diese Koordination von (konkreten oder gedachten) Handlungen und dem Abrufen von Zahlwörtern bildet den Kern des Zählvorgangs. Es wird eine „Eins-eins-Zuordnung“ zwischen Zahlwörtern und Objekten hergestellt (mit gleichem Anfang und synchronen Schritten).
  Zugleich wird die auszuzählende Menge Schritt für Schritt umstrukturiert – wieder konkret oder im Kopf: Bei jedem Zählschritt wird ein Objekt aus der noch zu zählenden Teilmenge in die schon gezählte überwiesen.
  Die genannten Stichworte greifen Erfahrungen auf, die jedem vertraut sind, der jüngere Kinder bei ihren Zählversuchen beobachtet.
- Doch mit dem richtigen Einsatz der Zahlwortreihe im Abzählprozeß ist es noch längst nicht getan. Man muß darüber hinaus wissen, daß das letzte abgerufene Zahlwort eine besondere Bedeutung hat und die *Anzahl* der Objekte angibt („cardinal principle“ – Prinzip der Erfassung der Anzahl). Ohne diese Einsicht würde der Zählvorgang nicht helfen zu entscheiden, ob gleich viele, ob mehr oder weniger Objekte vorhanden sind.
- Ein viertes Prinzip: Die bisher skizzierten Prinzipien beziehen sich auf die Frage, *wie* gezählt wird. Und *was* kann man zählen? Für Erwachsene ist es keine Frage, daß man den Zählvorgang auf „alles Zählbare“ anwenden kann: konkretes Material, Personen, Lichtsignale, Pendelschläge, Klingelzeichen. Für Kinder ist das nicht selbstverständlich. Sie zählen zunächst nur konkrete und gleichartige Dinge, erst nach und nach wird der Bereich des Zählbaren erweitert („abstraction principle“).
- Endlich muß das Kind noch erkennen, daß das Ergebnis des Zählvorgangs unabhängig davon ist, mit welchem Objekt er beginnt und wie er abläuft („order-irrelevance-principle“ – Prinzip von der beliebigen Abzählreihenfolge): Je nach Vorgehen wird den Objekten ein anderes Zahlwort zugeordnet. Die Zahlwörter sind nicht „Eigenschaften“ der Objekte: Der zuerst gezählte Vogel ist nicht der „Vogel Nummer 1“. Bei einer anderen Abzählung können die Objekte andere Etiketten bekommen – immer aber gelangt man zu demselben Ergebnis.

3.3. Fortschritte im Gebrauch der Zahlwortreihe

Nicht so ausführlich wie der Ansatz von GELMAN/GALLISTEL sollen die Untersuchungen referiert werden, die sich speziell mit der Strukturierung der *Zahlwort*reihe befassen. (Vgl. FUSON/HALL, 1982, auf die wir uns in der folgenden Kurzfassung beziehen. Einen guten Überblick erhält man wieder bei SCHMIDT, 1983. Zu überraschend ähnlichen Ergebnissen ist OEHL bereits 1935 gekommen.)
In der ersten Phase ist die Zahlwortreihe eine noch undifferenzierte Ganzheit, mit

der ein echtes Zählen nicht möglich ist. Erst wenn das Kind die einzelnen Zahlwörter als abgrenzbare Teile dieser Reihe erfaßt, ist die Voraussetzung für das Zählen, den Vergleich von Anzahlen und einfache Additionen geschaffen. Allerdings muß in diesem Stadium jeweils vom Anfang an gezählt werden. Im Verlauf der weiteren Entwicklung erwirbt das Kind dann die Fähigkeiten, von einer beliebigen Stelle an weiterzuzählen (von a bis b) und das Zählen rückwärts vorzunehmen. Noch später werden die Zahlwörter zu selbst wieder zählbaren Einheiten. Dies eröffnet die Möglichkeit, flexibel vor- und rückwärts zu zählen.
Diese Analysen zeigen, daß Zählen ein Geschehen mit vielen Aspekten ist, die sich nach und nach entwickeln. Die Entwicklung durchläuft viele Stufen, bis Zählen „in Vollendung" möglich ist. Dies kann auch dem Lehrer helfen, zu sehen, wo Schwierigkeiten sind.

4. Didaktische Folgerungen

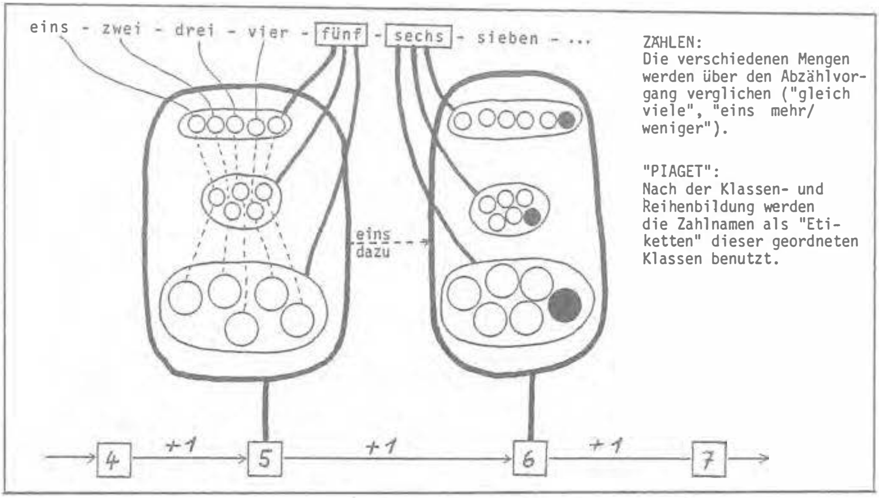
4.1. Versuch einer Synthese der beiden Zugänge

Beide skizzierten Zugänge erfassen wichtige Aspekte des Umgangs mit Zahlen. Sie zeigen verschiedene Schwerpunkte auf und ergänzen sich. Keineswegs stehen sie in Konkurrenz miteinander.
Einige Stichworte sollen dies erläutern:

(1) In beiden Zugängen wird sichtbar, daß die Entwicklung des Zahlbegriffs nur gelingt, wenn ein dynamisches und operatives System von *Beziehungen* im Denken des Kindes aufgebaut wird. Dabei spielen Zuordnungen eine besondere Rolle. Im Piaget-Konzept stehen Zuordnungen zwischen Objekten („Stück-für-Stück-Korrespondenz") im Mittelpunkt. Sie führen zu einer Klassenbildung, die Zahlwörter werden – am Ende – als Namen dieser Klassen verwendet.
Beim Zählen dagegen wird zunächst jeder Menge von Objekten ein Abschnitt der Zahlwortreihe zugeordnet. Dieser Abschnitt, der dann nur noch durch sein letztes Zahlwort angegeben wird, „speichert" die Information über die Anzahl der Objekte. Gleichmächtigkeit läßt sich so auf dem Umweg über die Zahlwortreihe feststellen („... gehören zum gleichen Abschnitt ...").
Das folgende Bild soll die beiden Wege festhalten (mit allen Vorbehalten, die mit einem solchen Versuch verbunden sind). Die gestrichelten Linien deuten den Piaget-Weg an, die anderen den über das Zählen.

(2) In beiden Fällen stehen *Handlungen* im Mittelpunkt – Zuordnungshandlungen bzw. Zählhandlungen –, die zunehmend verinnerlicht werden. Die Entwicklungen durchlaufen verschiedene Stufen. Dabei werden die Operationen stabiler, differenzierter und besser koordiniert. Hier wie dort müssen kognitive Schemata ausgebildet werden, mit deren Hilfe das Denken zugleich Struktur und Beweglichkeit erlangt.

(3) Beide Zugänge können sich gegenseitig stützen. Die Erfassung der Gleichmächtigkeit kann durchaus mit Zählen verbunden werden (und so war es in der Praxis auch wohl meistens). Umgekehrt: Wenn das Kind zählt – dieselben Objekte in verschiede



ner Reihenfolge, in unterschiedlicher Anordnung, verschiedene Kollektionen mit gleich vielen Objekten – dann ist das sicher auch ein Schritt zur Invarianz.

(4) Wichtig ist dabei die Erkenntnis, daß durchaus nicht ein Weg bis zum Ende zurückgelegt sein muß, ehe der andere beginnt. Natürlicher ist es, beide Aspekte Schritt für Schritt in ständiger Verzahnung auszubauen.
Als Beispiel: Der Zahlbegriff ist sicher noch ziemlich „weich", so lange das Kind zwar zählt, aber in seinem Zahlurteil unsicher wird, wenn die Objekte weiter auseinander- oder näher zusammengerückt werden. Doch ist diese Beobachtung kein Argument gegen die Zählversuche, sondern zeigt nur, daß erst ein Stück des langen Weges zu einem ausgereiften Zahlbegriff zurückgelegt ist. Fortschritte können sowohl über das Zählen als auch über Zuordnungsübungen erreicht werden.

(5) Welcher Aspekt in den Mittelpunkt rückt, hängt endlich auch entscheidend von der jeweiligen Situation ab. Dabei ist das Zählen insgesamt ohne Frage das leistungsfähigere Werkzeug. Es hilft (fast) immer weiter. Ohne Zahlwörter kommt man nur dann gut zurecht, wenn man beide Mengen vor Augen hat und eine paarweise Zuordnung der Objekte möglich ist. Die Frage etwa, ob für jedes Kind eine Tüte Milch da ist, läßt sich durch Auszählen (der Kinder hier, der Milchtüten dort) leicht beantworten. Ohne zu zählen, wird es schon schwieriger: Man müßte jedem Kind seine Milch zuordnen und dann sehen, ob es paßt.
In vielen anderen Fällen führt dieses Vorgehen allerdings nur noch auf Umwegen zum Ziel, z.B. dadurch, daß man andere Objekte oder Strichlisten zu Hilfe nimmt.

4.2. Einige Konsequenzen für den Schulalltag

Für den Schulalltag ist eine theoretische Analyse der Zahlbegriffsentwicklung nicht das Wichtigste. Ein Modell „für den Schulalltag" muß mindestens die folgenden Komponenten enthalten:

- Sinnvoller Einsatz der Zahlwortreihe zur Ermittlung und zum Vergleich von Anzahlen,
- Vergleich von Anzahlen ohne Rückgriff auf Zählen, dabei auch Übungen zur Invarianz,
- Gebrauch von Zahlen als Maßzahlen, insbesondere mit Längendarstellungen,
- Übersetzungen und Integration der verschiedenen Aspekte,
- Entwicklung arithmetischer Einsichten von verschiedenen Zugängen aus,
- Umgang mit Zahlen als Rechenzahlen.

Ziel ist der Aufbau eines Netzes von Erfahrungen, das nach und nach größer und tragfähiger wird.

Dabei gibt es ebenso viele Stellen, an denen das Zählen weiterhelfen kann, wie solche, an denen man sich von ihm lösen muß. Beide Aspekte sind für den Unterricht wichtig. Auch wenn man dem Zählen in den ersten Begegnungen von Kindern mit Zahlen eine Schlüsselstellung zugesteht, muß man sehen, daß insgesamt eine breitere Basis notwendig ist. Eine Überbetonung des Zählens kann an vielen Stellen das Nachdenken mit und über Zahlen außerordentlich behindern.

Dies gilt insbesondere

– bei der Erfassung verschiedener Zahlaspekte,
– bei der Begründung der Rechenoperationen,
– bei der Einsicht in Gesetzmäßigkeiten,
– bei der Erweiterung des Zahlenraumes,
– bei der Ausbildung flexibler Strategien im Umgang mit Zahlen.

Es wäre verhängnisvoll, wenn aus der Einsicht, daß Zählen ein natürlicher Zugang zu den Zahlen ist, nun der Schluß gezogen würde, daß es eine hinreichende Voraussetzung für bewegliches Denken mit Zahlen ist (vgl. FRICKE, 1985).

Dies wird an vielen Stellen in den nächsten Kapiteln deutlich. Daher beschränken wir uns hier auf einige Beispiele. Versuchen Sie einmal zu begründen, warum die folgenden Zahlaussagen wahr sind und wie man sie Kindern einsichtig machen kann.

$$
\begin{array}{rcl}
7 + 5 & = & 5 + 7 \\
7 + 5 & = & 8 + 4 = 9 + 3 \\
7 < 12, & & \text{also } 7 + 5 < 12 + 5 \\
10 - 5 & = & 9 - 4 = 8 - 3 \\
7 + 6 & = & 7 + 7 - 1 = 7 + 3 + 3 \\
6 + 9 & = & 6 + 10 - 1 \\
7 \cdot 6 & = & 6 \cdot 7 \\
7 \cdot 6 & = & 7 \cdot 5 + 7 \\
9 \cdot 8 & = & 10 \cdot 8 - 8 \\
36 + 7 & = & (36 + 4) + 3 \\
36 + 20 & = & 56 \\
435 + 100 & = & 535 \\
12 & & \text{ist gerade}
\end{array}
$$

Die in diesen Aussagen festgehaltenen Einsichten ziehen sich durch die gesamte Arithmetik und bilden die Grundlage für den Umgang mit Zahlen. Um sie zu erschließen, braucht man eine sehr hochentwickelte Zählkompetenz (vorwärts und rückwärts, von einer Zahl ab und bis zu einer Zahl, in geeigneten Schritten zählen), daneben und darüberhinaus aber vor allem hilfreiche Darstellungen: konkretes Material, Zahlenstrahl, Kilometerzähler, Hundertertafel ... Beides in ständiger Verzahnung!

5. Wo treffen Kinder auf Zahlen und wie gehen sie mit ihnen um?

(1) Theoretische Analysen der Zahlbegriffsentwicklung können zwar nützliche Hinweise für den Unterricht geben, sie bilden aber eine zu schmale Basis, um die Begegnung von Kindern mit Zahlen zu beschreiben.
Einen umfassenderen Ansatz gewinnt man, wenn man von der Frage ausgeht, wo und wie Kinder auf Zahlen treffen.
Wir wollen hier zunächst einige Schritte in dieser Richtung gehen; Situationen sammeln, in denen Kinder mit Zahlen umgehen, und daraus natürliche Zugänge für den Unterricht gewinnen[2].
Einige Stichworte „rund um die 5“:
- 5 Bonbons in der Tasche oder verstreut auf dem Tisch.
- 5 Schritte.
- Die Turmuhr schlägt fünfmal.
- 5 Runden auf dem Sportplatz.
- Im 5. Programm läuft der Krimi.
- Fünfmal vergeblich angerufen.
- Mit dem Bus Linie 5.
- Hans wird bald 5.
- 5 km mit dem Rad.
- Im Lotto wird die 5 gezogen.
- Annettes Schwester hat in Mathe eine 5 geschrieben.
- Am 5. hat er Geburtstag.
- Die 0,5-Liter-Flasche.
- Der FC 05 gewinnt 5:1.
- Mozartweg 5, Tel. 5019.
- Ein BMW 520.
- 3 + 2 = 5,
- und v. a. m.

Schon diese kleine Auswahl von „Fünfer-Geschichten“ macht deutlich, daß die Fünf sicher mehr ist als ein Wort in einer Reihe von Wörtern. Es zeigen sich ganz verschiedene Gesichter der 5. Nicht nur sind es verschiedene Sachsituationen und Erfahrungsbereiche, die angesprochen werden, es sind auch jeweils andere Verwendungsmöglichkeiten und Aspekte der Zahlen.
Die 5 wird gebraucht
- als Anzahl (5 Bonbons),
- als Maßzahl (5 km, 5 Stunden),
- als Rangzahl (der fünfte),
- zur Codierung (als Etikett, Linie 5),
- als Vervielfältigungszahlen[3] (fünfmal),
- als Rechenzahlen (3 + 2 = 5).

Es geht uns hier nicht darum, diese Aspekte theoretisch herauszuarbeiten. Das ist auch kaum möglich, da sehr viele Mischformen auftreten. Die Aspekte werden zudem bewußt nicht bestimmten Zugängen zu den Zahlen zugeordnet (etwa der ordinale Aspekt dem Zählen). Das wäre irreführend, da ja von jedem Zugang her möglichst viele Aspekte erschlossen werden sollen. Wichtiger ist zu sehen, daß diese Aspekte sich gegenseitig durchdringen und in vielfältigen Wechselbeziehungen entwickeln.

So kann man MÜLLER/WITTMANN (1984, S. 178) zustimmen, die feststellen:

„Eine eindeutig festliegende Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde gibt es selbst näherungsweise nicht. Insbesondere kann kein Aspekt als grundlegend für die anderen bezeichnet werden."

Dennoch ergeben sich für den Unterricht eine Reihe von konkreten Forderungen:

- Zahlen mit möglichst vielen Aspekten zu erfassen,
- flexibel mit ihnen denken zu lernen,
- sie vielfältig zur Erschließung der Umwelt einzusetzen,
- diese Entwicklungen als Prozeß zu verstehen, der vor allem auch Geduld erfordert.

(2) Diese Vielschichtigkeit des Zahlbegriffs zieht sich durch die gesamte Arithmetik. Wir werden sie an vielen Stellen, insbesondere auch bei der Erweiterung des Zahlenraumes, wiedertreffen. Hier soll nur an zwei Stichworten aufgezeigt werden, wie sie beim Vergleich und der Addition von Zahlen zum Vorschein kommt.

Was heißt z. B. 5 und 6 zu vergleichen und festzustellen, daß „5 kleiner als 6" ist?

- In der einen Mannschaft sind 6 Spieler, in der anderen nur 5.
- Ein Weg von 5 km ist kürzer als einer von 6 km.
- Hans kommt als Fünfter ins Ziel, Thomas als Sechster.
- Statt wie abgemacht um 5 Uhr, kommt Ute erst um 6 Uhr.
- Fünfmal war Hans in diesem Winter Schlittschuhlaufen, Uwe schon sechsmal.
- Heike hat am 5. Geburtstag, Annette am 6.

In vielen Fällen werden überhaupt keine Vergleichsüberlegungen aufgerufen. Die Straßenbahnlinie 6 ist weder größer oder schneller, noch kommt sie später als die 5. Das Haus Nummer 5 ist nicht kleiner oder jünger als das mit der Nummer 6, steht auch nicht vor ihm (wahrscheinlich aber in der Nähe). Die Lottokugel mit der 6 ist nicht dicker und wird nicht eher gezogen als die 5.

Ohne Kommentar noch einige Stichworte zur Addition:

- Moni bekommt von der Oma 5 DM, von der Tante noch 3 DM.
- Der Hinweg dauert 3 Stunden, der Rückweg 5 Stunden.
- Anja wird fünfte, Karoline kommt 3 Plätze hinter ihr ins Ziel.
- 5 Mädchen und 3 Jungen spielen Flöte.
- In der letzten Woche war Kai fünfmal im Schwimmbad, in dieser Woche dreimal.

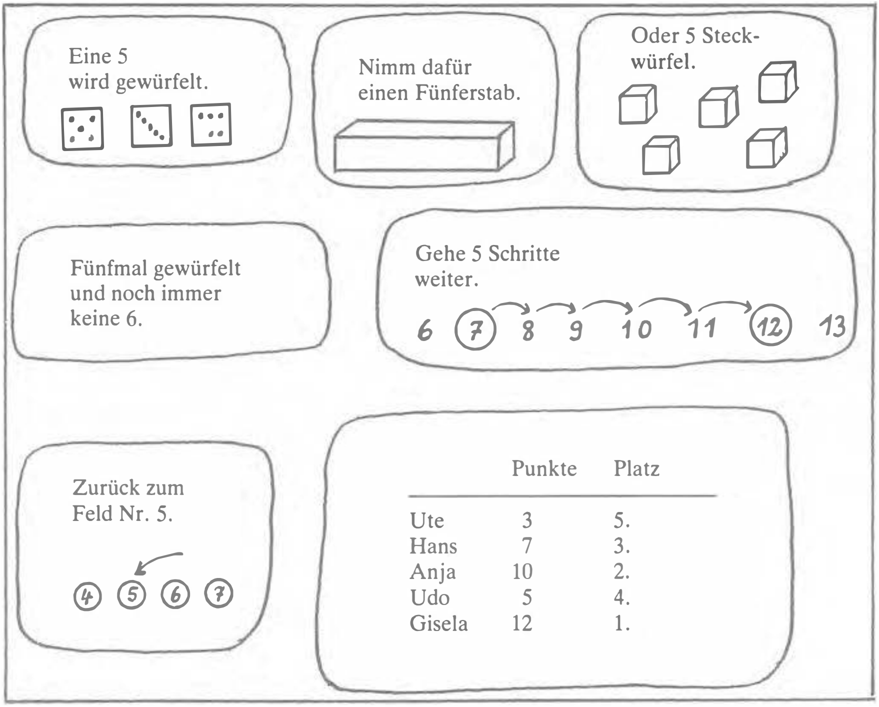
Und wie ist es hier?

- Die Linien 3 und 5 fahren zum Bahnhof.
- Um 3 Uhr und um 5 Uhr beginnen die Kinovorstellungen.
- Ute ist fünf Jahre alt, ihr kleiner Bruder drei.
- Hans wohnt im Haus Nummer 3, Dirk in Nr. 5.
- Beim Lotto werden die 3 und die 5 gezogen.

Die Beispiele zeigen, daß Zahlen und der Umgang mit Ihnen in vielfältiger Weise in Situationen und Erfahrungen verwurzelt sind. Erst Schritt für Schritt werden daraus Aussagen wie „$3 < 5$" oder „$3 + 5 = 8$" abstrahiert.

Diese Bindung an (subjektive) Erfahrungen ist ein wesentliches Merkmal mathematischer Einsichten. (Vgl. BAUERSFELD, 1983, der die Rolle von „subjektiven Erfahrungsbereichen“ beim Lernen eingehend analysiert.)

(3) Aus diesen Beobachtungen folgt zunächst, daß es nicht das Ziel des Unterrichts sein kann, möglichst mit einem Modell für die Zahlen auszukommen. Bei der Arbeit mit Steckwürfeln oder Cuisenaire-Stäben, am Zahlenstrahl oder beim Zählen treten jeweils andere Aspekte in den Vordergrund.
Es geht jedoch nicht um die Trennung dieser Aspekte, sondern um ihre Integration. Wie wenig sie sich trennen lassen, wird an den folgenden Aktivitäten sichtbar, die sich in einer einfachen Spielsituation ergeben können. Hier kommen ganz unterschiedliche Zahlideen ins Spiel.



6. Einige Schlußbemerkungen – zugleich als Ausblick auf das Weitere

(1) Der kurze Überblick über neuere Entwicklungen sollte vor allem deutlich machen, daß diese Ansätze nicht einfach ein „Zurück zum guten Alten“, insbesondere zum Zählen bedeuten.
Sie können insgesamt ein Schritt vorwärts zu offeneren, umfassenderen Bemühungen sein, ein Anlaß, Argumente und Positionen zu überdenken. Wenn dies gelingt, kann

die gegenwärtige Diskussion durchaus ein Beispiel für einen echten Fortschritt in der Didaktik sein, zugleich ein Schritt weiter in Richtung auf eine differenziertere Sicht des Verhältnisses von Mathematik, Psychologie, Didaktik und Schulpraxis. Es wäre schade, wenn statt einer Neubesinnung eine Erstarrung des Unterrichts die Folge wäre.
Ziel ist ja – über die unterschiedlichen Positionen hinweg –, daß die Kinder mit Zahlen vertraut werden und mit ihrer Hilfe ein Stück der Welt um sich herum entdecken und verstehen. Nur dann kann der Mathematikunterricht ein wichtiger Teil der Gesamtentwicklung des Kindes sein, „Mathematik als Denkerziehung" (Steiner, 1973).
Hier wird deutlich, daß die Ziele des Mathematikunterrichts weit über inhaltliche Ziele hinausgehen. Allgemeine Lernziele wie Entdecken, Vermuten, Begründen, Übertragen, Verallgemeinern, Regeln erkennen und nutzen, haben mindestens ebenso große Bedeutung. (Vgl. dazu auch den neuen Lehrplan für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen, 1985.)
Es gibt sicher verschiedene Wege zu diesen Zielen, und alles, was dabei vorwärtsbringen kann, sollte genutzt werden.

(2) Insbesondere sind der sinnvolle Einsatz von Lernmaterialien, ein Angebot anregender Spiele, gute Übungsformen (nach wie vor) unentbehrlich. In dieser Richtung hat die Didaktik der letzten Jahrzehnte einiges erreicht, was auch bei einer Neuorientierung nicht verlorengehen darf.
In den folgenden Kapiteln dieses Buches werden zahlreiche Beispiele vorgestellt, von denen wir hoffen, daß sie bei der Erreichung der angegebenen Ziele helfen können. Wie weit dies gelingt, kann nur der Lehrer im Einzelfall entscheiden. Daher soll an dieser Stelle auch keine theoretische Diskussion über Absichten und Hintergründe stehen.
Wir beschränken uns auf einige Leitideen zu Materialien, Spielen und Übungsformen:

- Sie sollen Überlegungen greifbar und sichtbar machen und so die Abstraktion (von den Handlungen) ermöglichen oder doch erleichtern.
- Sie sollen Anreiz und Spielraum schaffen, über Zahlen nachzudenken.
- Sie müssen flexibel einsetzbar sein und Lernen auf verschiedenen Ebenen erlauben (Differenzierung).
- Sie sollen soziales Lernen in vielfältiger Form fördern: miteinander reden, sich gegenseitig helfen, Lösungen in der Gruppe erarbeiten.
- Nicht zuletzt soll die Beschäftigung mit ihnen Spaß machen.

Wichtiger als die Frage, welche Materialien, Spiele und Übungsformen ausgewählt werden, ist, wie damit umgegangen wird. Die Möglichkeiten sind so vielfältig wie die Formen der kindlichen Begegnung mit Zahlen. Daher besteht auch kein Grund, sich ängstlich an bestimmte Vorschläge zu klammern. Es geht ja nicht darum, die Kinder zu Spezialisten für das Material A, das Spiel B oder die Übungsform C zu machen. Auf der anderen Seite sollte daraus allerdings nicht der Schluß gezogen werden, daß man dann auch gleich auf alles verzichten kann. Päckchen und Drill reichen sicher nicht aus. Am besten, Sie probieren es selbst!

(Literatur am Ende des Bandes)

Anmerkungen

1 Wir bezeichnen sie im folgenden trotzdem mit diesem Namen, da ein Bezug auf die „Mengenlehre“ noch oberflächlicher wäre und noch mehr Mißverständnisse hervorrufen könnte. Die didaktischen Entwicklungen haben sich durchaus sehr stark auf die Psychologie PIAGETS gestützt. Allerdings gab es auch darin unterschiedliche Strömungen. Insbesondere ist schon früh auf die Komplexität des Zahlbegriffs hingewiesen worden (vgl. WITTMANN, 1972).
Dem Leser, dem dieser kurze Steckbrief des PIAGET-Ansatzes allzu vergröbert erscheint (zu Recht!), sei etwa das Buch von G. STEINER: Mathematik als Denkerziehung, Stuttgart 1973, empfohlen. Darin findet man eine gründliche und behutsame Analyse der Ergebnisse PIAGETS und vieler weiterer Forscher und ihrer Bedeutung für den Unterricht.

2 Ein solches Vorgehen hat FREUDENTHAL (1983) als „didaktische Phänomenologie“ an zahlreichen Beispielen methodisch und inhaltlich analysiert. Sein Buch enthält auch ein ausführliches Kapitel über natürliche Zahlen, das viel mehr von ihrer Vielschichtigkeit aufdeckt, als hier angeprochen werden kann.

3 Diese Verwendung von Zahlen wird in der Literatur häufig als Operatoraspekt bezeichnet. Meist werden darunter auch die Maßzahlen mitgesehen. Der Sprachgebrauch könnte jedoch zu Mißverständnissen führen, da der Terminus Operator in der Didaktik allgemeiner für Funktionen verwendet wird, auch solchen, bei denen es nicht um Vervielfachung geht.