

Verstehen heißt Erfinden: Eigenproduktionen mit Gleichem Material in Großer Menge

Für die Mehrheit der Grundschullehrer/innen gehört es sicher nicht zum persönlichen Alltag, selbst Mathematik zu erfinden. Erheben wir jedoch nicht den Anspruch, mit unserer Mathematik Patente auf noch nicht Gedachtes zu erwerben, dann heißt Erfinden, subjektiv Neues hervorzubringen. Dies bedeutet Erkenntnisse zu gewinnen durch eigene Ideen, durch echte Fragen, durch das Lösen auftauchender Probleme. Zu einer Erfindung – hier sind kleine wie große Erfinder/innen gleichermaßen betroffen – gehört auch, dass neue Pfade mit Irr- und Umwegen, Zufälligkeiten und gelegentlichen Glückstreffern zu beschreiten sind.

Den Prozess des Erfindens bei Kindern näher zu untersuchen, ist Ziel eines Forschungsprojektes der Universität Bremen. Das Projekt geht zurück auf Modelle der Freinet-Pädagogik, »natürliches Lernen« von Mathematik im Unterricht zu initiieren (LE BOHEC 1997, GLÄNZEL 1997). Den Kindern unserer Untersuchungsklasse steht pro Woche eine Doppelstunde »Mathematik erforschen« zur Verfügung. Außer dem Auftrag »Mathematik zu erfinden« gibt es keine inhaltliche Einschränkung oder Anregung durch ein mathematisches Problem. Verfügbar sind jedoch Arbeitsmittel (Kleber, Pappen, Taschenrechner, Messinstrumente), Lerntagebücher (»Forscher/innen-Hefte«) und »Gleiches Material in Großer Menge« (STROBEL 2001). Dies waren im 2. Halbjahr der ersten Klasse etwa 4000 1-Centstücke, 3000 Holzwürfel, 400 Augenzwürfel, 1000 zweifarbige Holzquadrate, 1000 Eislöffelchen und 200 Pappbecher. Die Wahl eines Materials, wie lange an einem Produkt in einer Gruppe, zu zweit oder allein gearbeitet wird, steht den Kindern frei. Die Produkte werden in Gesprächsrunden (»Erfinder/innen-Runden«, Abb. 1 und 2) einigen interessierten Kindern oder auch der ganzen Klasse vorgestellt. Die Ideen der Kinder am Material öffnen Möglichkeiten, den Blick auf die (vielleicht verborgene) Mathematik zu werfen.



Abb. 1: 800 in Centstücken, »Achttausend« – »Acht-hundert« – »Neuntausend« – »Achtzig«! »Das ist Acht-hundert, weil da zwei Nullen sind!« – »Guckt euch doch mal das Datum an der Tafel an, 2003!« – »Achttausend, weil da sind ja auch zwei Nullen!«

Das Material: Die Gleichheit der Elemente und die große Menge

Das Besondere am Materialangebot ist, dass durch die große (ungeordnete) Menge gleicher Elemente bei Kindern wie Erwachsenen das Bedürfnis des Anfassens, Gestaltens und Strukturierens entsteht.

Das Material erfüllt das Kriterium der »Gleichwertigkeit«, also nur Würfel gleicher Größe, nur 1-Cent-Stücke, nur Eislöffelchen gleicher Form etc. Die Menge der Elemente stellt damit ein Abbild der gleichschrittigen Wiederholung des Zahlensystems dar. Die Elemente können, aber müssen nicht identisch sein: Unterschiedliche Vor- und Rückseiten, Beschriftungen (z. B. der Augwürfel) oder eine begrenzte Anzahl verschiedener Farben (Eislöffelchen, kleine Fliesen) bieten eine Erweiterung mathematischer Möglichkeiten. Der Reiz des Ordnen und das Entwickeln von Strukturen werden jedoch gerade durch die Schlichtheit des Materials und seiner charakteristischen Merkmale (Wertigkeit/Form) befördert. Es können mehrere Materialien nebeneinander oder auch ein Material angeboten werden (HÜLSWITT 1999). Das bedeutet, je nach Klassengröße und eingesetztem Material (sehr kleines Material braucht mehr Elemente) einige 100 oder einige 1000 Elemente. Die verfügbare Menge darf allerdings auch nicht ins »Unfassbare« expandieren. Die Chance, die große Menge als Ganzes ordnen und sortieren zu können, sollte für die Gruppe bestehen, da eine allzu große Menge wiederum nicht dazu einladen wird, diese Mühe aufzunehmen.

Beim Erfinden mit Gleichem Material in Großer Menge dient das Material nicht nur als Veranschaulichung von Mathematik, sondern vielmehr auch als »Denkwerkzeug«. Die Mathematik lässt sich für das Kind erfahrbar auf die eigenen Ideen und Produkte beziehen, sie wird vom Kind zunehmend benutzt, das eigene Produkt zu erschließen, weiterzuentwickeln und es als Erfindung zu präsentieren.

Eingesetzt werden neben den bereits erwähnten Materialien seit den 90er Jahren in verschiedenen Schulklassen und Fördergruppen noch Perlen, Wäscheklammern (beschriftet mit den Ziffern 100 – 999), gleiche Plastiktierchen, Murmeln, gelbe Überraschungseierhüllen und Filmdöschen (jeweils einige 100).

Erstbegegnung mit dem Material

In einer einführenden Gesprächsrunde bietet es sich an, mit den Kindern über das Vorhaben zu beraten, zusammen Mathematik zu erfinden. Wie die Praxis zeigt, nehmen Kinder den anspruchsvollen Auftrag, Mathematik zu erfinden, gerne an. Beim Thema »eigene Erfindungen« wird häufig von selbst gemachten Speisen, Spielen, Spielzeugen, Zahnputz-, Weck- oder anderen phantastischen Maschinen berichtet.

Die Frage »Was ist Mathematik?« wird auch in Workshops mit Vorschulkindern zumeist mit »Rechnen«, »Zahlen« und »Zählen«, sehr selten auch mit »Formen« beantwortet (vgl. auch den Beitrag von SÖBBEKE/STEINBRING in Kapitel 1).

Für die Lehrerin erscheint mir anfangs der Einsatz eines einzigen Materials einfacher. Es kann beispielsweise ein zugebundener Beutel mit Geldstücken durch den Kreis wandern und ertastet werden, was sich wohl darin befindet.

Die Sorgfalt, mit der Kinder dem Material begegnen, ist bei dem freien Gestalten und der großen Menge umso wichtiger und lässt sich bereits im Vorfeld beeinflussen.

Als ich 1998 erstmalig 15 Erstklässler/innen mit Gleichem Material in Großer Menge arbeiten lassen wollte, stürzten sich alle Kinder auf die ausgeschütteten Pfennige, kaum dass sie diese erblickt hatten. Seit ich daraus ein kleines Ritual mache, in der Form, dass eines der Kinder den Inhalt vorsichtig auf einem Tisch ausschüttet und die restliche Gruppe zunächst noch mit geschlossenen Augen über das Hören ermittelt, um was es sich in dem kleinen, unerwartet schweren Sack handelt, werden die Pfennige oder auch neuerdings die blinkenden Cent-Stücke zunächst mit einer gewissen Achtung bestaunt.

Für meine Praxis haben sich die folgenden beiden Regeln als sinnvoll erwiesen:

1. Erfinder/innen brauchen Ruhe!
2. Es macht nichts, wenn etwas heile bleibt! (D.h. bevor eine Erfindung kaputt gemacht wird, sollte sie mindestens einem weiteren Kind gezeigt werden.)



*Abb. 2: »Das ist eine Käseburg. Weil da kann man die Löcher zählen.«
– »Sind da mehr Löcher oder mehr Würfel?«*

Die Arbeitsphase

Die Selbstverständlichkeit des leisen Arbeitens (auch die Lehrerin spricht leise!) unterstützt die Kinder, sich von der Lernumgebung anregen zu lassen und sich zu vertiefen. Die zweite Regel verdeutlicht die Wertschätzung entstandener Produkte und unterstützt die soziale und fachliche Kommunikation, sollte einen Arbeitsprozess jedoch nicht blockieren. Eine herausfordernde Aufgabe für die meisten Lehrerinnen während der Arbeitsphasen ist, sich mit inhaltlichen Hilfestellungen völlig zurückzuhalten und den Lernweg der Kinder nicht vorschnell abzukürzen oder gar zu beenden. Kindern, denen es zunächst nicht gelingt, einen Anfang zu finden oder die bereits nach einigen Minuten ein fertiges Produkt erstellt haben, reicht meist ein kurzes Gespräch darüber, welches Material ihnen am besten gefällt und eine nochmalige Bestätigung, dass sie alles ausprobieren oder bei anderen zugucken dürfen. Selten zie-

hen es (ältere) Kinder vor, zunächst nur als Zuschauer/in mitzumachen oder mit Stift und Blatt zu arbeiten, um dann z.B. Rechenaufgaben zu notieren und sich dem Material bzw. der unbekanntem Arbeitsform erst nach einer Zeit zu nähern. Anfangs werden häufig – auch von Erwachsenen – bildhafte Darstellungen (Haus mit Baum, Gesicht) und Symbole (Ziffern, Buchstaben) gelegt oder gebaut. Zu beobachten ist auch, dass die Kinder sich gegenseitig inspirieren und einzelne Kinder bzw. Arbeitsgruppen sich direkt sehr vertiefen (HÜLSWITT 2004). Zum Abschluss einer ersten Arbeitsphase, die, je nach Konzentration 20 Minuten oder auch länger dauern kann, erstellt jedes Kind eine ihm angemessen erscheinende Abbildung des eigenen Produktes und betitelt oder nummeriert es. Die Abbildungen gehen vom gemalten Bild – das vielleicht der Phantasievorstellung, die hinter dem Produkt steht, entspringt – bis hin zu einer genauen Zeichnung oder auch dem pragmatischen Erfassen wesentlicher (mathematischer) Merkmale, die für eine Rekonstruktion vom Blatt notwendig sind (Abb. 3). Bei regelmäßiger Durchführung von Eigenproduktionen mit Gleichem Material in Großer Menge bietet sich der Eintrag in individuelle »Forscher/innen-Hefte« an (z.B. blanko DIN A4 mit festerem Einband).

Dieses eigene Buch verdeutlicht die Wertigkeit der eigenen Arbeit und bietet Möglichkeiten der Erinnerung, der Weiterführung und des Austausches. Auch wird die individuelle Lernentwicklung für alle Beteiligten sichtbar. Bei zeitintensiver oder auch regelmäßiger Durchführung (Projekt, Reihe, Unterrichtsbaustein) lässt sich beobachten, wie Schüler/innen sehr konzentriert in einen »Erfindungsprozess« eintauchen: Das Kind verfolgt eine eigene Idee bzw. greift eine Anregung aus der Gruppe auf. Das nun entstandene Produkt wird wiederholt gebaut, vereinfacht oder aber in komplexerer Form variiert bzw. auf ein anderes Material übertragen. Dies geschieht ebenfalls unter den Eindrücken der übrigen Arbeiten und Ideen. Dieses »Reprodukt« – also die Wiederholung einer Idee – wird individuell häufig so lange variiert, bis es zu einer (subjekti-

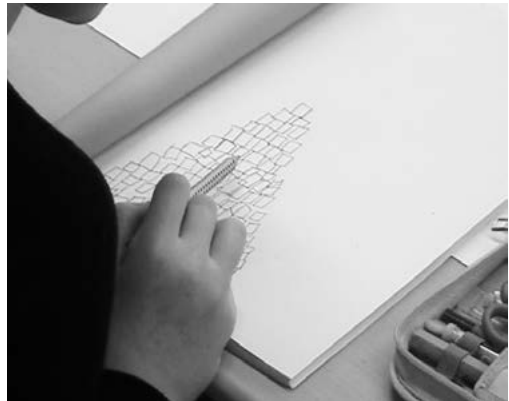


Abb. 3:
Wie zeichnet man ein Dreieck mit Löchern?

vele) wird individuell häufig so lange variiert, bis es zu einer (subjekti-



Abb. 4:
»Da steht ITIT.«

ven) Perfektionierung gelangt. Die Themen, mit der sich die Gruppe insgesamt beschäftigt, sind auffallend konzentriert, da die Kinder – wie bei »natürlichem« (außerschulischem) Lernen auch – ständig voneinander abgucken und ihre Produkte entsprechend optimieren können.

Die Erfinder/innen-Runde

In den »Erfinder/innen-Runden« werden die Produkte der Kinder gemeinsam besprochen. Sie sind ein Übungsfeld für lautes Nachdenken über Produkte und die weiteren mathematischen Möglichkeiten. Diese Gesprächsrunden werden von Lehrer/innen unterschiedlich organisiert (vgl. GLÄNZEL 1994, 2000). Je nach Klassengröße, Dauer und Regelmäßigkeit der Arbeitsphasen können sie parallel mit einem Teil der Kinder oder auch zu Beginn der Stunde für die ganze Gruppe mit einigen ausgewählten Produkten vom vorherigen Mal stattfinden. Das Problem eines eventuellen Überangebots an Präsentationsmaterial stellt sich insbesondere nach einer ersten Arbeitsphase, da in der Regel viele Kinder ihre Produkte vorstellen wollen. Eine Doppelstunde ist – möglichst mit Pausenunterbrechung – für eine Einführung der Arbeitsform, des Materials und einer Erfinder/innen-Runde dringend nötig. Bei einmaliger Durchführung (z.B. als Mathetag) sollte vorab (mit den Kindern) überlegt werden, wie Enttäuschungen darüber, dass nicht jedes Produkt besprochen werden kann, entgegengewirkt werden kann. Nach einem Erstversuch ergibt sich dieses Problem in der Regel nicht mehr, da sich



Abb. 5:
»Kattenhaus«
»Welches Zimmer
ist das größte?«
– »Wie viele
verschiedene
Fußbodenmuster
hat die Katzen-
wohnung?«

die Kinder – oft in Kleingruppen – in unterschiedlichen Phasen ihrer Arbeit widmen und ihre Produkte häufig erst zeigen wollen, wenn sie zu ihrer »Perfektionierung« gelangt sind.

Das besondere Kennzeichen der BOHEC'schen Gesprächsrunden ist, dass die Erfinder/innen sich zunächst darauf beschränken, Wortmeldungen ihrer Mitschüler/innen entgegenzunehmen und sich mit Kommentaren völlig zurückhalten. Hierdurch eröffnen sich neue Ideen und Fragen. Erst wenn die Kommentare der Gruppe vorgebracht sind, erklären die Erfinder/innen ihr Produkt (Abb. 4 und 5).

Die Lehrerin meldet sich wie die Kinder zu Wort. Sie versucht, zur richtigen Zeit die richtigen Impulse zu geben. Sie öffnet die Tür zur Mathematik, stellt wenn nötig eine Frage, die auf ein Problem lenken könnte. Sie sammelt, notiert Fragen und unterstützt die Koordination weiterer Arbeitsvorhaben – nicht zu verwechseln mit Arbeitsaufträgen! Ihre Herausforderung besteht darin, mathematische Möglichkeiten und Kernideen in einem Produkt zu sehen und ein diskretes Vermittlungsangebot zwischen den Ideen der Kinder und der entdeckbaren Mathematik zu leisten. Die »Lern-Begleitung« stellt auch für sie einen Lernprozess dar.

Wichtig hierfür sind die eigene mathematische Auseinandersetzung mit dem angebotenen Material und häufig auch der Austausch mit anderen Lehrer/innen sowie natürlich auch die Praxiserfahrung. Manchmal stecken interessante und passende mathematische Fragen in Produkten, die Antworten sind aber für die Kinder gerade nicht wichtig. Dem Thema oder der Kernidee wird sich manchmal erst nach einer Zeit von verschiedenen Seiten fast zufällig genähert, bis eine regelrechte Lust zu

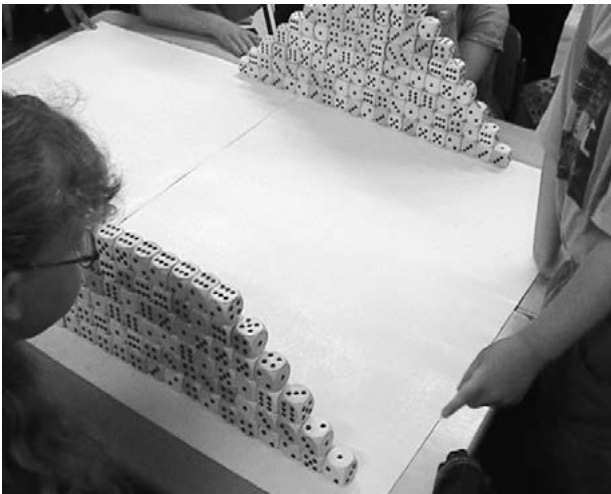
ermitteln, zu kombinieren, zu rechnen entsteht. Bei Kindern wie auch Erwachsenen (Studierende/Lehrerinnen) entstehen mitunter aber auch aufwändige Produkte, aus denen sich keine mathematischen Fragen oder Themen entwickeln lassen. Manchmal ist das Produkt eher ein »Kunstwerk« zum Anschauen und sollte dann auch als solches seinen Platz bekommen! Es ist nicht nötig und würde die Suche nach echten Fragen stören, wenn dann künstliche »Mathematisierungsversuche« unternommen würden. Die Arbeitsatmosphäre als solche, die Konzentration und manchmal auch die Hingabe, mit der ein Produkt erstellt wird, erleichtert meist die Entscheidung, ob und wenn ja, Unterstützung geboten werden sollte. Zu beobachten sind außerdem auch Phasen, in denen die Kinder sich zerstreuen oder Muße finden beim Malen etc., dann aber allein wieder zu ihrem eigentlichen Thema übergehen. Was mich in Erfinder/innen-Runden häufig schon erstaunt hat, ist das Gefühl für individuelle Leistung, das Kinder haben und das sie auch durch Anerkennung ausdrücken können, wenn die eigenen Leistungen be- und geachtet werden. Dies kann in einem Mathematikunterricht, der sich primär über richtig und falsch gelöste Aufgaben definiert, nur schwer der Fall sein.

1,2,3,4 Eckstein ...

Arwins »Beinah-Quadrat« beim Pyramidenbau

Um den Kindern unserer Projektklasse (1. Schuljahr) einen guten Einstieg in das neue »Fach« zu ermöglichen, fand an drei aufeinander folgenden Tagen ein Workshop statt, in dem das leise Arbeiten am Material, die Erfinder/innen-Runden und die Forscher/innen-Hefte eingeführt wurden. In dieser Klasse sind Dreiecke und Quadrate beständige Themen. Das »Ursprungsprodukt« hierzu ist ein am ersten Workshoptag aus Holzwürfeln auf Lücke gebautes Dreieck (»Käseburg, weil sie so viele Löcher hat«, Abb. 2). Diese Form wird regelmäßig nachgebaut, häufig zu Beginn der Stunde oder auch als erstes Produkt beim Arbeiten mit neuem Material. Aus der »Käseburg« entwickelten sich verschiedene Varianten: Versetzte Dreiecke mit Lücke unterschiedlicher Größen, Dreiecke ohne Lücke, plan oder versetzt, analoge Konstruktionen mit gestapelten Holzquadraten, Dreiecke aus gelegten Eisilöffeln sowie Dreiecksvarianten mit Spielwürfeln (Abb. 6 und 7).

Ein Problem, das eine Reihe Kinder beschäftigt, ist das Legen größerer Quadrate. Gezählt wird der erste Rand beispielsweise mit zehn Steinen. Der Eckstein wird jedoch beim Erfassen der anliegenden Seite nicht mitgezählt. Diese erhält dann beim Bauen einen Stein zu viel. Aus dieser



*Abb. 6 und 7:
Dreiecksvarianten mit Spielwürfeln*

Sichtweise »additiven Denkens« (kein Element wird doppelt gezählt) entstehen unterschiedliche »Beinah-Quadrate« oder – im günstigsten Fall – ein echtes Quadrat, das jedoch, obwohl immer nur zehn Steine für jeden Rand gelegt wurden, plötzlich die Seitenlänge von elf Würfeln aufweist. Mit dem Problem des »Beinah-Quadrats« ist auch Arwin befasst: Seine drei-etagigen Quadrat-Pyramiden stellen zunächst eine Variante bereits

gebauter Dreiecke dar. Er wiederholt das neue Produkt gleich zehn Mal. In der Erfinder/innen-Runde wird es besprochen (Abb. 8).



*Abb. 8: Pyramidenstadt; »Pyramiden.« –
»Das sind 10 Pyramiden wo Gold drinne is.
Also der Stein in der Mitte ist Gold.« –
»Da hast du 10 Goldstücke?«*

In einer weiteren Doppelstunde unternimmt er den Versuch, seine Pyramide um eine weitere Etage zu erhöhen. Er beginnt jedoch mit dem »Beinah-Quadrat« (4 x 5 Würfel). Die ihm bekannte Pyramidenspitze von 2 x 2 Würfeln lässt sich jedoch passend nicht aufsetzen. Nach wiederholtem Ab- und Aufbau der beiden oberen Etagen verzichtet er auf den parallelen Abstand zur unteren Fläche und zieht die Eigenschaft »quadratisch« vor (Abb. 9 bis 12).

Bei einem nächsten Versuch, größere Pyramiden zu bauen, findet er eine neue Variante, eine Vereinfachung: Er baut mehrere Flächen des ihm bekannten 3 x 3-Quadrates übereinander und setzt seine Pyramidenspitze darauf. Wieder baut er eine Stadt, diesmal mit unterschiedlich hohen Pyramiden. Zu einer (subjektiven) Perfektionierung ist er scheinbar noch nicht gekommen – er überredet zwei weitere Jungen, ihm beim Bau einer »ganz großen« Pyramide zu helfen. Es wird von drei Seiten gebaut, seinen beiden Mithelfern ist das Quadratproblem bislang nicht aufge-taucht. Da er seine Idee nicht weiter erklärt, wird die Pyramide immer längsseitiger (Abb. 13). Auch in dieser Stunde findet sich keine Lösung



Abb 9 bis 12

für Arwins Problem – obendrein wird sogar noch versucht, eine »Tür« in die Pyramide zu schieben, wodurch sie zu seinem Ärger ganz aus der Form gerät (Abb. 14).

Zeit zum Begreifen lassen

An diesem Beispiel zeigt sich auch, wie sich soziale sowie fachliche Kommunikation beim Erfinden entwickeln muss. Da Arwin sein eigentliches Anliegen vor dem Bau der »ganz großen« Pyramide nicht mitteilen konnte, gelang es ihm in dieser Arbeitsphase nicht, seine Mitschüler mit seinem mathematischen Problem anzustecken. Neben den verschiedenen Lernprozessen, die individuell vollzogen und doch miteinander verknüpft sind, wird es



Abb. 13 und 14

in den weiteren Stunden spannend sein, welche Lösung Arwin für die Gestaltung einer Quadratpyramide gelingt, die seinen Größenvorstellungen entspricht. Vielleicht bemerkt er, dass einige Kinder bereits eine neue Zähltechnik entwickelt haben, mit der sich beliebig große Quadrate erstellen lassen. Möglicherweise kommt er auch durch beharrliches Versuchen mit dem Denkwerkzeug Würfel allein auf die richtige Idee.

Meine Aufgabe ist es, solche Prozesse nicht abzukürzen, sondern darauf zu vertrauen, dass Kinder den richtigen Schritt schon zur richtigen Zeit tun können. In dieser Nicht-Abkürzung von Lernwegen steckt zu Anfang sicherlich eine Herausforderung. Selbstentdeckende Lernprozesse sind gleichzeitig aber auch geprägt von Konzentration, Beharrlichkeit und Begeisterung, welche Erfinder/innen empfinden und in der Gruppe verbreiten. Diese Erfahrung gibt Mut, sich auf ungeplante Inhalte einzulassen und vereinfacht den Rollenwechsel von der Lehrerin zur Lern-Begleiterin.

Literatur

- GLÄNZEL, A.: Von Rätselzahlen, dicken Bäumen und der Unendlichkeit.
In: Die Grundschulzeitschrift, 8. Jg., H. 74 / 1994, S. 11–14
- GLÄNZEL, H.: Verstehen heißt Wiedererfinden – natürliche Methode in der Primarstufe. Vortrag anlässlich der MUED-Sommertagung 1996.
In: Fragen und Versuche, Zeitschrift der Freinet-Kooperative, 21. Jg., H. 82 / 1997, S. 21–29
- GLÄNZEL, A.: »Zuerst haben wir es ein bisschen umständlich gerechnet.«
Forscherrunden im Mathematikunterricht. In: Die Grundschulzeitschrift, 14. Jg., H. 138 / 2000, S. 12–14
- HÜLSWITT, K.: MATHE 2000+1 oder: Die natürliche Methode für den Mathematikunterricht mit gleichem Material in großer Menge.
In: Fragen und Versuche, Zeitschrift der Freinet-Kooperative, 23. Jg., H. 89 / 1999, S. 61–64
- HÜLSWITT, K.: Mathematische Eigenproduktionen im Mathematikunterricht,
in: CARLE, U. (Hrsg.): Praxishandbuch Anfangsunterricht. Baltmannsweiler, Schneider Hohengehren 2004 (in Vorbereitung)
- LE BOHEC, P.: Verstehen heißt Wiedererfinden. Natürliche Methode und Mathematik. Pädagogik-Kooperative e. V. (Hrsg.), Reihe Moderne Schule. Bremen 1997
- STROBEL, A.: Natürliche Mathematik in der Freinet-Pädagogik. In: LENGNINK, K. / PREDIGER, S. / SEBEL, F. (Hrsg.): Mathematik und Mensch. Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik, Mühlthal, Verlag Allgemeine Wissenschaft 2001, S. 111–126

Die abgebildeten Fotos sind aus einem Videofilm, mit dem der Unterricht dokumentiert wurde. Das durch die Bewegungsabfolge bedingte teilweise unscharfe oder verwackelte Aussehen ließ sich leider nicht vermeiden.