Marei Fetzer / Elke Söbbeke

Operationsvorstellungen zur Subtraktion in kooperativen Arbeitsphasen entwickeln

Die Grundvorstellungen der elementaren Rechenoperationen sind vielfältig. Sie erfordern, genau wie Zahlen in ihren vielfältigen (Zahl-)Aspekten, eine reiche Erarbeitung. Nur so können sie von den Kindern durchdrungen und verstanden werden. Die Subtraktion beispielsweise beansprucht nicht nur verschiedene, sondern sogar *konträre* Grundvorstellungen: Einige Subtraktionsaufgaben lassen sich sehr effektiv über das Ergänzen lösen, also über einen Rückgriff auf die Addition. Wie aber lassen sich diese sehr unterschiedlichen Grundvorstellungen auf- und ausbauen?

Insbesondere im Hinblick auf das *gemeinsame, kooperative* Mathematiklernen *aller* Kinder zeigt dieser Beitrag auf, inwiefern (Anschauungs-) Materialien diese unterschiedlichen Grundvorstellungen adäquat repräsentieren und Kindern in einer *heterogenen Lerngruppe* auch unterschiedliche Zugänge zum Verstehen der Subtraktion eröffnen können. Dabei wird vor dem Hintergrund der Anforderung, dass langfristig *alle* Kinder einer heterogenen Lerngruppe *adäquate* Operationsvorstellungen entwickelt haben sollen, geklärt, welche Rolle (Anschauungs-)Materialien insbesondere in Bezug auf Differenzierung einnehmen können, sowie welche Bedeutung in diesem Lernprozess gerade auch das Lernen von- und miteinander hat.

Subtrahieren – mehr als nur »Wegnehmen«

Zu den vier grundlegenden Vorstellungen der Subtraktion gehören das »Abziehen«, »Vereinigen«/»Teil-Ganzes-Vorstellung«, »Ergänzen« sowie »Vergleichen«/»Unterschied« (vgl. Padberg / Benz 2011, 115):

Während beim *»Abziehen«* eine Menge verändert wird, wird unter der Vorstellung *»Vereinigen« / »Teil-Ganzes«* eine Menge in zwei Teil-Mengen zerlegt. Unter der Vorstellung des *»Ergänzens«* wird eine von zwei Mengen durch Hinzufügen von Objekten so verändert, dass beide Mengen anschließend die gleiche Anzahl von Objekten haben. Um zu *»Vergleichen«* / den »Unterschied« zu ermitteln, werden zwei Mengen bezüglich der Anzahl der Objekte miteinander verglichen.

Das kindliche Denken ist gerade im Anfangsunterricht vielfach noch an die Anschauung und an konkrete Alltagsbezüge und Erfahrungen gebunden. Deshalb werden die verschiedenen Grundvorstellungen zur Subtraktion ebenso wie zu allen elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) im arithmetischen Anfangsunterricht zunächst über direkte Alltagsbezüge und über Situationen aus der Lebenswelt der Kinder thematisiert und eingeführt. Insbesondere auch in inklusiven Lernsituationen ist das Ausnutzen solcher Alltagsbezüge unerlässlich, um den Kindern einen verständnisbasierten Zugang zu dem abstrakten mathematischen Inhalt »Rechenoperationen« zu ermöglichen. Es wird also ein »Medium« benötigt, das zwischen dem abstrakten Begriff und dem Denken des Kindes vermittelt und es ermöglicht, über diese abstrakten Inhalte sprechen, nachdenken und mit diesen operieren zu können (vgl. Söbbeke 2010). So werden den Kindern kleinere Sachsituationen, Bilder oder Rechengeschichten angeboten, die grundlegende Operationsvorstellungen repräsentieren. Indem die Kinder diese Sachsituation konkret handelnd oder gedanklich durchdringen, sollen sie unterstützt werden, adäquate mentale »Bilder« von der mathematischen Idee und den vielfältigen Vorstellungen der entsprechenden Operation aufzubauen. Dieses tun sie, indem sie nach und nach strukturelle Ähnlichkeiten bzw. Gemeinsamkeiten in den unterschiedlichen alltäglichen Situationen erkennen. Hierfür ist nicht nur der Umgang eines jeden Kindes mit den konkreten Situationen wichtig, sondern in erster Linie der reflektierende Austausch mit den Deutungen anderer Kinder. Nur hierüber können Kinder einen ersten Zugang gewinnen zu dem, was *allen Handlungen und Situationen gemeinsam* ist: die Subtraktion (vgl. Fetzer / Tiedemann 2017).

Das nachfolgende Schulbuchbeispiel (vgl. Abb. 1) illustriert diese didaktische Intention, indem verschiedene kleinere »Situationen« zur Subtraktion veranschaulicht werden:

Abb. 1: Situationen zur Subtraktion (Jo-Jo Mathematik 1 (2017), Cornelsen, 36)

- Von der Bank verabschieden sich 2 der 5 Kinder, 3 Kinder bleiben sitzen,
- von den 7 Bällen nimmt ein Junge 3 Bälle weg, 4 Bälle verbleiben im Netz
- usw.

Über die (tatsächlichen, eventuell nachgespielten oder vorgestellten) Handlungen des »Weggehens«, »Wegnehmens« etc. erhalten die Kinder in diesem Beispiel eine wichtige Verstehensgrundlage und einen erklärenden Hintergrund für eine Grundvorstellung der Subtraktion – hier das Abziehen.

Sollen Kinder aber ein langfristig tragfähiges Verständnis und eine umfassende Operationsvorstellung zur Subtraktion entwickeln, ist es unerlässlich, die Subtraktion nicht nur mit der Vorstellung des Abziehens zu verbinden, sondern vielfältige Vorstellungen zur Subtraktion auszubilden. Gerade im Hinblick auf die Entwicklung effizienter Rechenstrategien ist es produktiv und zentral, dass Kinder Aufgabenkontexte zu verschiedenen Grundvorstellungen zu Subtraktionsaufgaben kennenlernen. Denn während unter der Grundvorstellung des »Abziehens« praktisch nur das Subtrahieren naheliegt, kann beim »Ergänzen«, »Vergleichen« und »Vereinigen« sowohl subtrahiert wie auch addiert werden (vgl. Padberg / Benz 2011, 115). Hier zeigt sich der enge Zusammenhang von Addition und Subtraktion, der insbesondere auch für Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen produktiv zur Berechnung von Aufgaben genutzt werden kann. Die Untersuchungen von Verschaffel et al. (2010) zeigen eindrücklich die Vorzüge des Ergänzens im Vergleich zum Abziehen beim Lösen bestimmter Subtraktionsaufgaben. Außerdem belegen sie, dass vielen Kindern schon ab dem ersten Schuljahr das Ergänzen leichter fällt als das Subtrahieren. Einige Subtraktionsaufgaben (insbesondere mit kleinen Differenzen) können somit sehr effektiv über den Rückgriff auf die Addition gelöst werden. Hierzu bedarf es eines gewissen »Operationssinns«, um entscheiden können, ob eine Aufgabe wie »21 – 19 = « schneller und leichter über das Ergänzen (»19 + __ = 21«) oder über das Abziehen gelöst werden kann (»21 – 19 = __«). Die Untersuchungen von Verschaffel et al. (2010) zeigten zugleich auch, dass das Ergänzen als eine wichtige Vorstellung der Subtraktion im Unterricht mit den Kindern nicht gleichberechtigt thematisiert und vergleichend gegenübergestellt wird (ebd., 33). Dieses ist aber insbesondere für die schwächeren Kinder eine wichtige Voraussetzung, um überhaupt einen Operationssinn und damit ein breiteres Repertoire an effizienten Subtraktionsstrategien entwickeln zu können.

Grundvorstellungen zur Subtraktion veranschaulichen

Während das »Abziehen« sehr gut auf alltagsnahe Handlungen zurückgeführt werden kann, ist dies bei der Grundvorstellung des »Ergänzens« im Kontext der Subtraktion vielfach schon schwieriger und erscheint zum Teil etwas konstruierter: *»Lilian hat 4 Murmeln. Sie bekommt von ihrer Freundin Luisa einige Murmeln hinzu und hat schließlich 6. Wie viele Murmeln hat sie von Luisa hinzubekommen?«* Diese typische »Schulbuchsituation«

erscheint mit der Brille des Lebensweltbezugs als eher realitätsfern. Wenn ein Kind – bleiben wir in der gegebenen Situation – Murmeln von der Freundin geschenkt bekommt, wird ihm die Anzahl der ergänzten Murmeln *direkt offensichtlich*, da man diese ja gewöhnlich von der Freundin überreicht bekommt. In den seltensten Fällen ermitteln Kinder ausgehend von der neuen Anzahl an Murmeln die von der Freundin hinzugeschenkten Stücke durch »*Ergänzen*«. Das Beispiel illustriert, dass einige den Kindern im Unterricht präsentierte Situationen bei genauerer Betrachtung artifiziell sind. Das gilt insbesondere im Kontext des Ergänzens.

An diesem Beispiel wird zudem deutlich, dass mathematische Begriffe nicht immer und nicht ausschließlich auf alltagsnahe Bezüge zu konkreten Sachsituationen zurückgeführt oder gänzlich darüber verstanden werden können. Mathematische Begriffe sind abstrakt. Handlungen und mentale Erkundungen an strukturierten Anschauungsmitteln bieten einen ergänzenden Zugang zum Verstehen der vier verschiedenen Grundvorstellungen zur Subtraktion. Möglich ist beispielsweise die Arbeit am Zwanzigerfeld (vgl. Abb. 2) oder mit Rechenschiffchen und mit entsprechenden bildlichen Darstellungen, um ein einseitiges Operationsverständnis zu vermeiden und eine flexible Vorstellung zu unterstützen.

Sobald man selber einmal versucht, die verschiedenen Grundvorstellungen beispielsweise zur Aufgabe »9 – 5 = 4« mit Material durchzuführen, wird zum einen die *Unterschiedlichkeit* der Grundvorstellungen offenbar, zum anderen werden die *Beziehungen* zwischen ihnen deutlich (vgl. Abb. 2). Beim

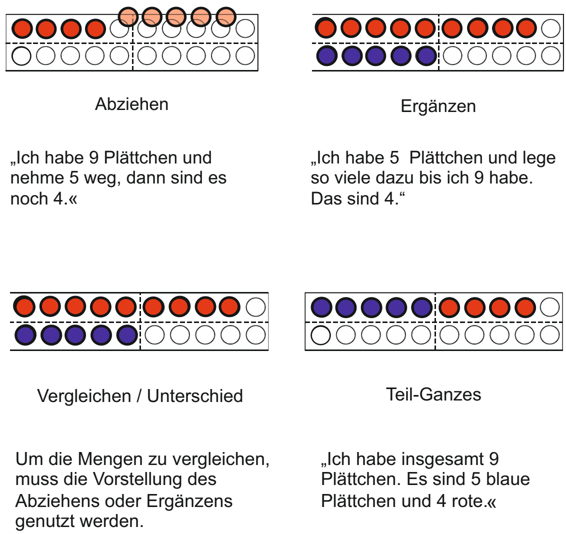


Abb. 2: Die vier Grundvorstellungen der Subtraktion zur Aufgabe »9 – 5 = 4«

Abziehen handelt es sich um eine dynamische Vorstellung, die sich sehr anschaulich durch eine Handlung mit dem Material darstellen lässt: »*Von 9 Plättchen nehme ich 5 Plättchen weg. Es bleiben 4 Plättchen liegen.*« Allerdings zeigt dieses Beispiel auch, dass nach dieser Handlung der Ausgangszustand (Minuend: 9 Plättchen) für den Betrachter nicht mehr sichtbar ist. Entsprechend haben einige Kinder Schwierigkeiten, sich an den ursprünglichen Ausgangszustand oder die durchgeführte Operation zu erinnern (vgl. Häsel-Weide 2014, 28); lediglich das Ergebnis der Subtraktionsaufgabe, die Differenz, ist noch sichtbar. Das Vergleichen entspricht demgegenüber einer statischen Vorstellung und ist daher gut mit Objekten darzustellen, indem etwa zwei Plättchen-Mengen untereinander in das Zwanzigerfeld einsortiert werden. Um aber die Mengen zu vergleichen, also den Unterschied zu bestimmen, ist eine dynamische Handlung notwendig (vgl. Häsel-Weide 2014, 29), indem von der kleineren Menge zur größeren Menge vier Plättchen ergänzt werden. Genauso können von der größeren Menge solange Plättchen weggenommen werden, bis man die kleinere Menge erhält. An dieser Stelle zeigt sich – trotz der Unterschiedlichkeit der Vorstellungen – die Beziehung zwischen den Grundvorstellungen des Abziehens, Ergänzens und Vergleichens, da das Vergleichen unter Rückgriff auf das Abziehen oder Ergänzen durchgeführt werden muss.

Gemeinsam Operationsvorstellungen aufbauen, vertiefen und vernetzen

Verschiedene Studien in der Mathematikdidaktik (vgl. Lorenz 1998; Schipper 2004; Söbbeke 2005; Steenpaß 2014), aber auch die Erfahrungen vieler Lehrpersonen in der Schulpraxis bestätigen, dass die bloße Handlung der Kinder am Material keine direkte Eins-zu-eins-Übertragung zum gewünschten Vorstellungsbild in den Kopf des Kindes bewirkt. Die im Material repräsentierte Rechenoperation kann nicht direkt und einfach abgelesen werden. Vielmehr muss jedes Kind sie eigenständig in das Material hineindeuten.

Damit ist der Aufbau von Operationsvorstellungen ein individueller, konstruktiver Akt, den letztendlich jedes Kind für sich alleine vornehmen muss. Hierbei werden dementsprechend auch unterschiedliche Vorstellungen aufgebaut oder aktiviert. Die zwangsläufig sehr heterogenen Deutungen der Kinder sollten im Unterricht aber nicht als störend empfunden werden. Vielmehr ermöglichen es gerade die unterschiedlichen Deutungen, die verschiedenen Grundvorstellungen zur Subtraktion im Unterricht aufzugreifen und dann systematisch und bewusst zu reflektieren. Gerade wenn die Kinder verschiedene Ideen und Operationsvorstellungen mit Hilfe von Material entwickeln und diese den anderen Kindern vorstellen, kann die Subtraktion in ihren vielfältigen Aspekten kennengelernt und die unterschiedlichen Grundvorstellungen können produktiv zueinander in Beziehung gesetzt werden. Hierfür ist es wichtig, dass die Anschauungsmittel im Unterricht nicht nur als bloße Rechenhilfsmittel für die schwächeren Kinder benutzt werden. Im Mittelpunkt der Arbeit mit dem Material darf nicht nur das bloße Handeln oder Darstellen stehen, sondern immer wieder auch das gemeinsame Beschreiben und Reflektieren *über* die durchgeführten Handlungen oder Darstellungen.

> »Für die Ausbildung von geeigneten arithmetischen Vorstellungsbildern (ist) nicht die Handlung mit dem Veranschaulichungsmittel selbst so wesentlich, sondern (…) das Nachdenken darüber.« (Lorenz 2013, 190)

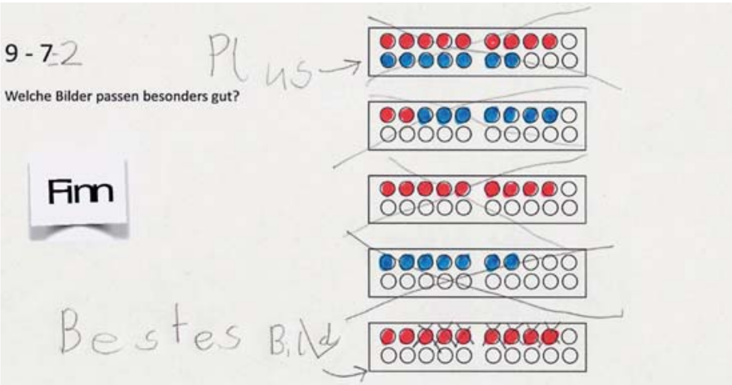
Insbesondere über das gemeinsame Reflektieren verschiedener Deutungen können Kinder andere bzw. für sie selbst neue Vorstellungen kennen und nachvollziehen lernen (vgl. Fetzer 2016) und ihr mathematisches Wissen *strukturell* erweitern. Somit ist Mathematik im Austausch *die Grundlage* für besonders günstige Lernbedingungen für alle Kinder. Dabei sind es durchaus nicht nur die originellen und ausgereiften Vorstellungen, die zum Aufbau vielfältiger Operationsvorstellungen beitragen. Im Gegenteil: Es zeigt sich in der Unterrichtspraxis, dass es ebenfalls die Nachfragen der Kinder sind, die bestimmte Zusammenhänge noch nicht verstanden haben oder Inhalte noch nicht durchdrungen haben, die eine geeignete Basis für weitere Klärungen und somit für den Verstehensprozess vieler Kinder bedeuten. Oft sind es nicht ausschließlich sprachlich ausformulierte Anmerkungen, die einzelne Kinder im Lernprozess weiterbringen. Auch Irritationen – beispielsweise unterstützt durch ein Zeigen auf die eigene Plättchenanordnung im Zwanzigerfeld – können dazu beitragen, vielfältige Operationsvorstellungen zu thematisieren. Grundlage hierbei ist die *Identifikation* von *Unterschieden* und *Gemeinsamkeiten* und das gemeinsame Sprechen aller Kinder darüber: *»So habe ich es. Wie hast du es?« »Liegen unsere Plättchen gleich, oder haben wir es unterschiedlich gemacht?« »Ist meine Anordnung (oder deine) dann falsch, oder geht beides? Warum?« »Was ist das ›Gleiche‹ (das strukturell Verbindende) in unseren unterschiedlichen Darstellungen?«*

Schließlich kann gerade dasjenige Kind, welches lediglich eine Subtraktionsvorstellung ausschließlich handelnd umgesetzt hat, für Mitschülerinnen und Mitschüler Anlass bieten, sich über alternative Darstellungen Gedanken zu machen, diese zu vergleichen und zu versprachlichen. Mathematik im Austausch bietet das Potenzial für reichhaltiges und produktives Arbeiten mit der Vielfalt der Deutungen. So erweitern Grundschulkinder ihre eigenen Operationsvorstellungen langfristig und vor allem strukturell, was gerade Kindern mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen nicht durch das bloße Bearbeiten möglichst vieler Aufgaben gelingen würde.

Im Folgenden sind einige konkrete Beispiele zusammengestellt, wie *gemeinsame* Lernphasen gestaltet werden können, so dass Kinder auf unterschiedlichen Anforderungsniveaus gefördert werden können. Die Kinder bearbeiten hierfür jedoch nicht verschiedene Aufgaben, sondern setzen sich im Sinne der natürlichen Differenzierung mit *einer gemeinsamen Aufgabe* auseinander. Ihre Bearbeitungen können jedoch eine breite Anforderungsspanne umfassen, von einem Trainieren der *Rechenfertigkeiten* über das Entwickeln verschiedener *Rechenstrategien* bis hin zu einem Austausch über unterschiedliche *Subtraktionsvorstellungen* und *strukturelle Zusammenhänge*: So können beispielsweise bei der Arbeit mit Rechenschiffchen im Zwanziger-Rahmen (vgl. Abb. 3) Schülerinnen und Schüler (vorgegebene) Minusaufgaben legen und lösen. Auf dieser Ebene setzen sich *alle* Kinder zunächst mit der Berechnung der Aufgabe auseinander, finden – ggf. auch gestützt durch die Handlung am Material – eine Lösung und entwickeln erste *Rechenfertigkeiten*. Darüber hinaus werden sich schon in dieser Phase *unterschiedliche Vorgehensweisen* und *Rechenstrategien* beobachten und thematisieren lassen. Aber auch unterschiedliche *Operationsvorstellungen* kommen zum Tragen, wenn einige Kinder bei der Aufgabe »11 – 4« elf Wendeplättchen in den Zwanziger-Rahmen legen und daraufhin vier wieder herausnehmen. Die verbliebenen Steine zeigen das Ergebnis »7« an (vgl. Ayses Bearbeitung in Abb. 3). Neben diesem Vorgehen, in welchem sich die Vorstellung des *Abziehens* manifestiert, ist auch das *Vereinigen / Teil–Ganzes* erwartbar. Dazu legen die Kinder elf blaue Steine und drehen dann vier um, so dass die rote Farbe sichtbar wird. Legen die Kinder hingegen zunächst vier Steine einer Farbe und füllen dann in der anderen Farbe bis zu elf Steinen auf, lässt sich das als eine Variante des *Ergänzens* verstehen. Auf dieser Ebene bietet es sich an, mit den Kindern über die verschiedenen Handlungen zu reflektieren und zu besprechen, dass alle der o. g. Handlungen (*Operationsvorstellungen*) zu der Aufgabe passen, und warum dieses so ist. In der Phase des handelnden Umgangs mit konkretem Material werden die Kinder somit auf sehr unterschiedliche Weise gefordert.

Abb. 3: Ayse nimmt von den 11 Steinen vier weg. Sie »zieht ab«

Im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit wird gezielter auf die Vielfalt der Grundvorstellungen hingearbeitet. Dazu werden verschiedene bildliche Darstellungen zu einer Subtraktionsaufgabe angeboten (vgl. Abb. 4) unter der Leitfrage: *»Welche Bilder passen am besten zur Aufgabe 9 – 7? Was meinst du?«* Nach einer Phase der Einzelarbeit ist im Anschluss eine Partnerarbeit gewinnbringend, in der die Kinder ihre Einschätzungen reflektieren und vergleichen. Dabei können Kinder, die – wie Finn (Abb. 4.1) – ausschließlich die Variante mit den durchgestrichenen Plättchen (Abziehen) markiert haben, mit Kindern ins Gespräch kommen, die – wie Lenja (Abb. 4.2) – die zweifarbige Darstellung (Vereinigen) der zweiten Zeile ebenfalls für angemessen befunden haben. Finn, der die oberste Darstellung als Plusaufgabe interpretiert (vermutlich als »9 + 7«) und damit als nicht passend empfindet, erfährt durch den Austausch mit Lenja eine wichtige neue Deutung: Lenja versteht die Darstellung nämlich *auch* als Plusaufgabe, aber im Sinne eines Ergänzens oder Vergleichens zu der Aufgabe »9 – 7«. Das zeigt sie durch ihre Einzeichnung und indem sie die Plusaufgabe »7 + 2« unter der Aufgabe »9 – 7« zu der Darstellung notiert.



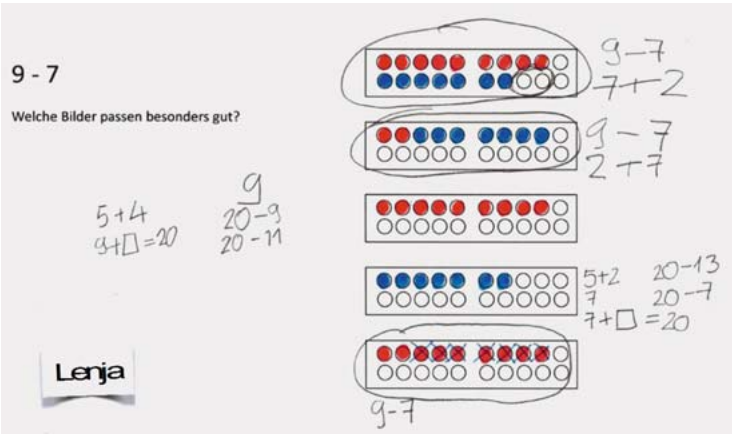


Abb. 4.1 und 4.2: Welche Bilder passen besonders gut?

Ein solches Arbeiten mit verschiedenen bildlichen Darstellungen bietet außerdem das Potenzial, dass Kinder vertieft über den Zusammenhang von Addition und Subtraktion nachdenken, wenn eine Mitschülerin, wie in unserem Beispiel Lenja (Abb. 5), zu einer Darstellung verschiedene Aufgaben notiert hat (9 – 7, 7 + 2 bzw. 9 – 7, 2 + 7). Über Äußerungen wie »*So lässt sich 9 – 7 darstellen.*« »*Ich würde 2 + 7 allerdings genau gleich legen!*« eröffnet sich die Möglichkeit, eine Darstellung auf unterschiedliche Art deuten zu lernen und damit verschiedene Vorstellungen (z. B. Ergänzen, Vergleichen) zu vernetzen.

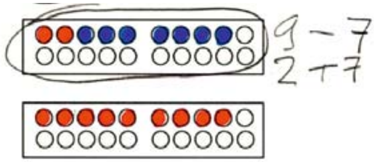


Abb. 5: Lenja findet passende Aufgaben zum Punktefeld

In ähnlicher Weise lässt sich auch mit dem Zahlenstrahl arbeiten. Anhand dieses Materials wird insbesondere die Vorstellung des Ergänzens (be-)greifbar. Differenzierungspotenzial liegt hier u. a. darin, ob eine vollständige Skalierung gewählt wird, ob lediglich Zehner- und Fünferzahlen zur Orientierung markiert sind oder ob es sich um einen leeren Zahlenstrahl handelt. Erstere Darstellung ermöglicht ein zählendes Rechnen. Die anderen Versionen unterstützen eine Ablösung vom zählenden Rechnen und helfen, die Zahlen in Relation zueinander zu erfassen. Die Entwicklung eines relationalen Zahlbegriffs ist entscheidend, um ›geschickt‹ rechnen und flexibel beispielsweise zwischen dem Ergänzen und Abziehen wählen zu können. Bei oben genannter Aufgabe »21 – 19« bietet sich das Ergänzen an. Das erkennt ein flexibler Rechner aber nur, wenn er die beiden Zahlen relational deutet, d. h. wenn er weiß, dass die 21 und die 19 (auf dem Zahlenstrahl) nah beieinanderliegen.

Auch eine unkonventionelle Lernumgebung rund um das »Fliesenlegen« (vgl. Abb. 6), die nicht die klassischen und vertrauten didaktischen Anschauungsmittel nutzt, eignet sich, um unterschiedliche Subtraktionsvorstellungen auszubilden und miteinander in Verbindung zu bringen (vgl. Lorenz 1998).

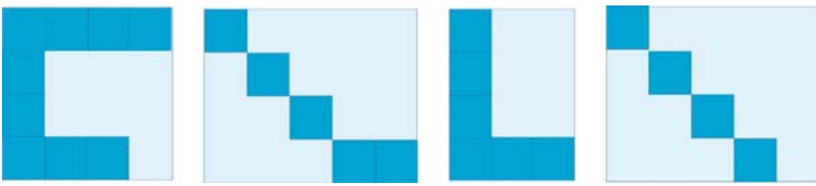


Abb. 6: Wie viele Fliesen fehlen?

Unter der Fragestellung *»Wie viele Fliesen fehlen?«* arbeiten die Kinder zunächst in Einzelarbeit, um unterschiedliche Vorgehensweisen zu ermöglichen und später zu reflektieren. Das Legen mit konkreten ›Fliesen‹ erlaubt grundsätzlich auch ein Abzählen, um die Lösung zu bestimmen (Ausbildung von *Rechenfertigkeiten*). Dabei wird aber ein echtes Subtraktionsverständnis nicht notwendigerweise ausgebildet. In einem weiteren Zugang ist es jedoch möglich, auch verschiedene *Grundvorstellungen zur Subtraktion* anzusprechen: Wenn einige Kinder beispielsweise zunächst die Gesamtzahl der Platten bestimmen und dann die bereits verlegten Fliesen subtrahieren, liegt eine Vorstellung des *Abziehens* zugrunde. Legen die Kinder die Fliesen tatsächlich oder in der Vorstellung in die Lücken, entspricht das dem *Ergänzen*. Fragt man danach, ob der Stapel der Platten, die schon verlegt sind, höher war als der Stapel der Fliesen, die noch zu verlegen sind, so zielt die Überlegung auf die Vorstellung des *Vergleichens* ab. »Welcher der beiden Fliesenstapel ist höher? Um wie viel?«

Fazit

Im inklusiven Mathematikunterricht lernen die Kinder mit dem *gleichen* Material *gemeinsam* auf ganz *unterschiedlichen* Niveaus Subtrahieren. An den Beispielen im Beitrag wird deutlich: Wird Material in Verbindung mit geschickt und reichhaltig gestalteten Arbeits- und Deutungsaufträge eingesetzt, so kann es sein Potential zur Differenzierung entfalten und entscheidend zu einer intensiven Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Subtraktionsvorstellungen beitragen. Vor diesem Hintergrund sind Anschauungsmittel nicht mehr (nur) didaktische (Rechen-)Hilfsmittel für die »Schwachen«. Im Gegenteil: In Arbeitsphasen, in denen Kinder kooperativ mit einem Anschauungsmittel arbeiten, kann der Erkenntnisgewinn zur Subtraktion auf sehr unterschiedlichen Niveaus initiiert oder auch vertieft werden. Während einige Kinder handelnd die Subtraktion ›begreifen‹, erkunden andere Beziehungen zwischen verschiedenen Subtraktionsvorstellungen und entdecken und begründen erste Gesetzmäßigkeiten. Auf diese Weise trägt das Operieren mit Material dazu bei, Ähnlichkeiten und Unterschiede der zugrunde liegenden mathematischen Strukturen zu entdecken und so verschiedene Subtraktionsvorstellungen in Beziehung zu setzen. Entscheidend ist dabei immer eine kooperative Phase, in welcher der Austausch unterschiedlicher Ideen und Ansichten möglich wird.

Literatur

Becherer, J. / Schulz, A. (Hrsg.) (2017): Jo-Jo Mathematik 1. Berlin: Cornelsen.

Fetzer, M. (2016): Inklusiver Mathematikunterricht. Ideen für die Grundschule. Baltmannsweiler: Schneider-Hohengehren.

Fetzer, M. / Tiedemann, K. (2017): Talking with Objects. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10, Dublin). (Im Druck)

Häsel-Weide, U. (2014): Subtraktion durch Abdecken. Operationsvorstellungen zur Subtraktion aufbauen und vertiefen. In: Mathematik differenziert, H. 2, 28–33.

Lorenz, J. H. (2013): Grundlagen der Förderung und Therapie. Wege und Irrwege. In: M. von Aster / J. H. Lorenz (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern, Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik (2. Auflage). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 181–193.

Lorenz, J. H. (1998): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. 2. unv. Auflage. Göttingen: Hogrefe.

Lorenz, J. (Hrsg.) (1998): Mathematikus Übungsteil Teil 2. Braunschweig: Westermann.

Padberg, F. / Benz, C. (2011): Didaktik der Arithmetik (4. erweiterte, stark überarb. Auflage). Heidelberg: Springer Spektrum.

Schipper, W. (2004): Von Handlungen zu Operationen: Entwicklung von Strategien des Kopfrechnens aus Handlungen an Materialien. In: Ganser, B. (Hrsg.): Rechenstörungen (5. erweiterte Auflage). Donauwörth: Auer.

Schülke, C. / Söbbeke, E. (2010): Die Entwicklung mathematischer Begriffe im Unterricht. In: C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbeke (Eds.), Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion. Seelze: Klett-Kallmeyer, 18–28.

Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Steenpaß, A. (2014): Grundschulkinder deuten Anschauungsmittel. Eine epistemologische Kontext- und Rahmenanalyse zu den Bedingungen der visuellen Strukturierungskompetenz (Dissertation, Universität Duisburg-Essen) http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=35866.

Verschaffel, L. / Torbebeyns, J. / De Smedt, B. / Petres, G.. / Ghesquiere, P. (2010): Indirect Addition: Theoretical, Methodological und Educations Considerations. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 31–38.